

Na pieniądzach każdy się zna... cz. 2

Michał Szurek

Inflacja

Zadanie 5

W pierwszym półroczu inflacja wyniosła 2 procent, a w drugim 1 procent. Jaka była roczna inflacja?

— Rozwiązanie. Przypomnijmy, jak się oblicza inflację. Dwuprocentowa inflacja w skali półrocznej znaczy, że to, co kosztowało złotówkę, po pół roku miało cenę 1,02 zł, a po następnych sześciu miesiącach $1,02 \cdot 1,01 = 1,0302$. Inflacja wyniosła zatem trochę więcej niż 3 procent. Gdyby pierwsza inflacja była 8 procent, a druga 12 procent, to roczna byłaby równa 21 procent, a nie 20.

Zadanie 6

Ile będzie warte 1000 zł złożone w banku na rok na 4%, jeżeli inflacja roczna jest równa 2%?

To jest inne zadanie niż poprzednie. Jeszcze raz przypomnijmy, że inflacja 2% znaczy, że to, co kosztowało x , kosztuje teraz $1,02x$. A co kosztowało 1000, będzie kosztować 1020.

Jednocześnie w banku 1000 zł zostanie skapitalizowane do 1040 zł.

Ile warte jest 1000 złotych po roku? Jeżeli np. coś kosztuje 1 grosz, to za 1000 złotych można kupić 100 000 sztuk, a po roku za 1004 złote można kupić $1004/1002 = 100,199$. Owe 1000 złotych po roku będzie warte 1001 zł 99 groszy.

Rady i uwagi

- Inflacja p procent znaczy, że to, co kosztowało c , kosztuje teraz o p procent więcej, tj. $(1+p/100)c$.
- Złotówka po roku jest warta $1/r$!!!
To jest **dyskontowanie**. Bo to, co kosztowało 1 zł, teraz kosztuje r .
- Odróżniamy procent od punktu procentowego! Jeżeli inflacja była równa 2 procent i spadła do jednego procenta, to spadła o pięćdziesiąt procent, ale o jeden punkt procentowy!

Zadanie 7

W warunkach pracy mam zagwarantowane, że moja płaca będzie rosła w tempie o jeden punkt procentowy ponad poziom inflacji. Jak rośnie moja siła nabywcza?

— Rozwiązanie. Wyobraźmy sobie towar, który kosztuje złotówkę za sztukę, gdy ja zarabiam c złotych. Inflacja p procent znaczy, że cena towaru się zmieni do $1+p/100$ złotych. Moje zarobki wyniosą wtedy $c(1+(p+1)/100)$ złotych i będę mógł za nie kupić $c(1+(p+1)/100) / (1+p/100)$ sztuk tego towaru. Moja siła nabywcza wzrośnie więc

$$1 + \frac{p+1}{100} = 1 + \frac{1}{100+p} \quad \text{raza.}$$

Na przykład gdy $p = 2$ (inflacja 2 procent), to moja siła nabywcza wzrasta „tylko” 1,0098 raza. W warunkach hiperinflacji jest jeszcze gorzej. Dla $p = 100$ (koszty rosną dwukrotnie), ja zarabiam efektywnie więcej tylko 1,005 raza.

Stopa nominalna i efektywna

Zadanie 8

Stopa procentowa dla lokat w ExtraBanku wynosi 6% w stosunku rocznym. Zatem lokata roczna 1000 zł przynosi po roku 60 zł. Zakładamy lokatę kwartalną, odnawialną w wysokości 1000 zł. Ile mamy po roku?

— Odp. Stopa kwartalna to 1,5 %. Zatem po roku mamy $1000 \cdot 1,015^4 = 1061,36$ zł.

A zatem nominalna stopa 6% przy kwartalnej kapitalizacji daje stopę efektywną 6,136%.

Finansowe wprowadzenie liczby e.

Czynnik procentowy: $r = 1 + p/100$.

$k \rightarrow k \cdot r$. Pewien bank daje 100 procent odsetek. Złotówka po roku stanie się 2 zł.

Stopa kwartalna = 25 %.

Złotówka po kwartale $\rightarrow 1,25$ zł,

po roku $1,25^4 = 2$ zł 44 gr.

Stopa miesięczna = 8,3333... %.

Złotówka po miesiącu $\rightarrow 1,08333...$ zł,

po roku $1,08333...^{12} = 2$ zł 61 gr.

Stopa dzienna: 100/365 procenta = 0,27397... procenta. Po roku

$1,00027397...^{365} = 2$ zł 71 gr.

A przy stopie sekundowej? Po roku mamy $(1 + 1/31536000)^{31536000}$

Po $1/n$ — tej roku złotówka wzrośnie do $(1+1/n)^n$

Zatem **e** to granica wzrostu, czyli:

efektywny czynnik procentowy odpowiadający ciągłej kapitalizacji przy nominalnej stopie 100%.

Kuszenie zerowymi odsetkami

Co kilka miesięcy duże sieci handlowe mają dogodnymi formami spłaty kredytu, nawet bez odsetek albo „kup teraz, płać za rok”. Zdarzają się dogodne oferty, większość z nich jest jednak zręczną metodą wyciągnięcia pieniędzy z kieszeni klienta w inny sposób. Przyjrzyjmy się modnej ostatnio ofercie odroczonej płatności:

Zadanie 9 Odroczone płatność.

Sklep oferuje różne formy zapłaty za komputer. Mamy trzy możliwości:

- 1) albo zapłacić teraz 8600 gotówką,
- 2) albo płacić teraz 4600 i za rok 4600.
- 3) albo teraz nie płacić nic, za rok 5290 złotych i po dwóch latach 5290.

Wybierając drugie lub trzecie wyjście, *de facto* dostajemy więc kredyt. Wyznać jego stopę.

Rozwiązanie. Płacąc tak, jak w sposobie nr 2, dostajemy 4000 kredytu, który spłacamy kwotą 4600. Zatem stopa procentowa tego kredytu jest równa $= (4600 - 4000)/4000 = 600/4000 = 15\%$.

Niech r będzie czynnikiem procentowym odpowiadającym szukanej stopie procentowej kredytu, który otrzymujemy, wybierając trzecią możliwość. Dyskontujemy przyszłe płatności. Mamy zależność

$$8600 = 5290/r + 5290/r^2$$

$$\text{czyli } 860r^2 - 529r - 529 = 0.$$

Rozwiązujemy: $\Delta = 529^2 + 4 \cdot 860 \cdot 529 = 1449^2$. Stąd $r = 1,15$.

Stopa kredytu = 15%. Obydwa sposoby ratalne są według stopy 15%.

Stale płatności

Renta (= stała płatność). W powieściach francuskich XIX wieku występuje czasami słowo rentier. Jest to osoba otrzymująca regularne zyski z pieniędzy ulokowanych w banku. Dlatego regularne wypłaty (w tej samej wysokości i w równych odstępach czasu) nazywamy rentą. Nie jest to najlepszy termin, ale lepszy niż niekiedy używany potworek językowy *annuita*. Dla wpłat używamy zrozumiałego terminu płatność. Matematycznie renta i płatność to to samo. Co bowiem dla jednego jest rentą, dla drugiego jest płatnością. Rozróżniamy oczywiście płatności z góry (na początku miesiąca czy roku) i z dołu (na końcu). Matematycznie rzecz biorąc, wszelkie stałe przepływy pieniężne to renta; w tym i nasza pensja za pracę.

Zadanie 10

Wpłacamy po 100 miesięcznie na $p = 12\%$ (w skali rocznej).

Ile mamy po 5 latach?

Rozwiązanie. Niech jak zwykle $r = 1 + p/1200$. U nas: 1% miesięcznie.

Dla płatności z góry (na początku miesiąca) mamy szereg
 $100r^{60} + 100r^{59} + \dots + 100r = \dots$ u nas $\dots = 8248,64$ zł.

Dla płatności z dołu (na końcu miesiąca) mamy szereg
 $100r^{59} + 100r^{58} + \dots + 100r + 100 = \dots$ u nas $\dots = 8166,97$.

Zadanie 11

Renta wieczysta: Niech stopa procentowa = p . Wyznaczyć wartość bieżącą renty wieczystej 100.

Rozwiązanie. Renta wieczysta to stała płatność, bez oznaczonego terminu końca. Wyobraźmy sobie na przykład, że bogaty wujek postanowił wypłacać siostrzeńcowi po 100 euro miesięcznie. Jaś chciałby mieć jednak większą sumę od razu, może ją bowiem zainwestować w intratne przedsięwzięcie, z którego będzie przez długi czas czerpać zyski większe niż 100 miesięcznie. Wbrew pozorom, wartość bieżąca renty wieczystej nie jest nieskończona i to nie z powodu ograniczonego czasu trwania życia ludzkiego (na tej ziemi, ale w niebie/piekle/czyśćcu podobno i tak nie myśli się o pieniądzach). Wartość bieżąca renty wieczystej to bowiem suma szeregu geometrycznego nieskończonego o ilorazie $1/r$, gdzie r jest czynnikiem procentowym. Na przykład dla $p = 5\%$ mamy $r = 1,05$, więc wartość renty wieczystej 100 jest równa $100/(1 - 1/r) = 100/(1 - 1/1,05) = 100/(1 - 100/105) = 100/(5/105) = 100 \cdot 21 = 2100$.

Splata kredytu metodą stałych rat

$r = 1 + p/100$ to czynnik procentowy, zatem $K \rightarrow K(1 + p/100) = Kr$

Twierdzenie. Jeżeli pożyczamy K na p procent na n lat (okresów) i chcemy spłacać po tyle samo, to: wielkość stałej raty jest równa

$$Kr^n(r-1)/(r^n-1)$$

a po k -tym roku (okresie) zostaje do spłaty

$$Kr^k - Kr^n(r^k-1)/(r^n-1)$$

kapitału.

Dowód: Indukcja względem k .

Dla $k = 0$ twierdzenie jest prawdziwe.

Krok indukcyjny: dług po k latach $Kr^k - Kr^n(r^k-1)/(r^n-1)$ stanie się $(Kr^k - Kr^n(r^k-1)/(r^n-1))r$, a po zapłaceniu raty $(Kr^k - Kr^n(r^k-1)/(r^n-1))r - Kr^n(r-1)/(r^n-1) = \dots = Kr^{k+1} - Kr^n(r^{k+1}-1)/(r^n-1)$

Uwaga. Omówiona tu metoda stałych rat (stałych spłat) to nie to samo, co metoda stałych rat kapitałowych, gdzie spłacamy za każdym razem taką samą część kapitału, a coraz mniejsze odsetki.

Zadanie 12

Wyliczyć wielkość stałej raty miesięcznej przy spłacie kredytu 100 000 złotych wziętego na 12% w skali rocznej na 5 lat.

Rozwiązanie. We wzorze z powyższego twierdzenia mamy $K = 100\,000$, $r = 1,01$, $n = 60$. Wyliczamy stąd, że wielkość raty jest równa 2224 zł 44 grosze. Płacąc tyle przez 5 lat, zanosimy do banku łącznie $60 \cdot 2224,44 = 133466$ zł 40 groszy, czyli spłacamy ponad 33% procent więcej (efekt dźwigni).

Zadanie 13

Obliczyć wielkość stałej raty kredytu 1600, wziętego na 12% na dwa lata ze spłatą kwartalną według zasady spłat w równej wysokości.

Odpowiedź. Jest ona równa

$$1600 \cdot 1,03^8 \cdot \frac{0,03}{1,03^8 - 1} = 227 \text{ zł } 93 \text{ grosze.}$$

Uwaga. Niekiedy banki stosują inną metodę obliczania stałej płatności. Rozkładają mianowicie sumę wszystkich odsetek obliczanych według metody stałych rat kapitałowych równomiernie na wszystkie płatności. W sytuacji z zadania 11 byłoby tak: Suma wszystkich odsetek to $48 + 42 + 36 + 30 + 24 + 18 + 12 + 6 = 216$ złotych, zatem do każdej raty kapitałowej 200 dodajemy $216/8 = 27$ złotych. Zatem stała spłata jest równa 227 złotych, mniej niż w metodzie, która jest „bardziej poprawna” matematycznie. Dlaczego słowa „bardziej poprawna” są w cudzysłowie? Dlatego, że sposób naliczania odsetek jest sprawą umowy między bankiem a klientem. Jeśli klient podpisze umowę, w której będzie jawnie napisane, że przy obliczaniu odsetek bank stosuje regułę „dwa razy dwa jest równe pięć”, to... jego strata.

Stopa zwrotu

Jeżeli inwestujemy pewną sumę pieniędzy w przedsięwzięcie, z którego po krótkim czasie — teoretycznie natychmiast — otrzymujemy zysk, to stosunek wielkości tego zysku do zainwestowanej sumy (wyrażony w procentach) nazywamy stopą zwrotu z przedsięwzięcia. Jeżeli jednak zysk jest odległy w czasie, sprawa obliczenia stopy zwrotu jest bardziej skomplikowana. Musimy pamiętać, że wartość pieniędzy (ekonomiści używają tu liczby pojedynczej: wartość pieniądza, co nie jest poprawnie po polsku) jest zmienna w czasie. Nie chodzi tylko o inflację, lecz głównie możliwość reinwestowania otrzymanych dochodów.

Zadanie 14

Inwestycja 100 przyniosła po roku dochód 80, po drugim roku 48.

Wyznaczyć stopę zwrotu. 28 %? Nie!!!

Musimy pamiętać, że 48 zł za dwa lata to nie to samo, co teraz.



Dyskontowanie to dzielenie przez r .

A więc 80 zł za rok to $80/r$ teraz!

Oznaczmy roczny czynnik procentowy przez $r = 1 + p/100$.

Mamy równanie $100 = 80/r + 48/r^2$. Stąd $25r^2 - 20r - 12 = 0$;

$$\Delta = 400 + 48 \cdot 25 = 1600,$$

stąd $r = 6/5$, bo $-2/5$ odrzucamy. Czyli $p = 1/5$.

Odpowiedź: Stopa zwrotu jest równa 20 %.

Zadanie 15

Inwestycja 18 przynosi w kolejnych latach zyski 9, 17, 4. Wyliczyć stopę zwrotu.

Szkic rozwiązania. Równanie $18r^3 - 9r^2 - 17r - 4 = 0$. Dodatni pierwiastek $r = 4/3$.