

Pewien nauczyciel poprosił mnie o radę. On sam bowiem został zapytany przez uczennicę gimnazjum, kto wymyślił matematykę i po co ona jest. Nauczyciel ów postanowił dać to uczniom „do przemyślenia”, zachęcić ich do lektury wybranych pozycji i spisania własnych przemyśleń. Zapytał mnie, czy znam jakieś książki, artykuły, które mógłbym im polecić? „Oczywiście”, odparłem, „a zresztą, mogę zaraz napisać”. I tak powstał ten tekst: opowieść o jednej z przyczyn powstania matematyki.

Harmonia sfer

Michał Szurek

cy nieczęsto rewanżują się podobnym uczuciem³⁾. Pitagoras uważał, że każda planeta w swojej wędrówce po orbicie wydaje przyjemne dźwięki, których jednak nie potrafimy usłyszeć. Z tak dawnych czasów pochodzi zwrot „harmonia sfer”. W dwa tysiące lat później Johannes Kepler rozwinął pogląd pitagorejczyków. Uważał, że „muzyka niebios” jest ciągłą, wielogłosowa, a „usłyszeć” ją można intelektem. Wylczył na przykład, że stosunek prędkości kątowej Saturna w aphelium do jego prędkości kątowej w peryhelium wynosi w przybliżeniu 4 do 5, czyli jest proporcją tercji majorowej. Podobna proporcja dla Jowisza odpowiada tercji minorowej, a dla Marsa – kwintce. Kepler wierzył również (a nawet wylczył), że odległości kolejnych planet od Słońca wyrażają się liczbami mającymi związek z rozmiarami wielościanów foremnych.

Pitagorejczycy podzielili całą skalę muzyczną na równomierne oktawy. Za jednostkę skali przyjęli interwał między dźwiękami, jakie wydaje „cała” struna, a następnie struna dzielona na dwie, cztery, osiem, ... części. Stąd mamy znaną wszystkim nam dzisiaj oktawę. Oktawa pitagorejska dzieliła się na siedem tonów i dwanaście półtonów, ale podstawową jednostką była kwinta (stosunek podziału struny 3:2) i kwarta (4:3).

TEKST TRUDNY

Liczba półtonów między dźwiękami	Nazwy interwału	Dźwięk odległy o ten interwał od c	Stosunek częstotliwości w skali pitagorejskiej
0	Pryma	c	1
1	Sekunda mała	cis (<i>pryma zwiększona</i>), des	cis 2187/2048 des 256/243
2	Sekunda wielka	d	9/8
3	Tercja mała	dis (<i>sekunda zwiększona</i>), es	
4	Tercja wielka	e	81/64
5	Kwarta czysta	f	4/3
6	Tryton = kwarta zwiększona = kwinta zmniejszona	fis, ges	
7	Kwinta czysta	g	3/2
8	Seksta mała	gis (<i>kwinta zwiększona</i>), as	
9	Seksta wielka	a	27/16
10	Septyma mała	ais (<i>seksta zwiększona</i>), b	
11	Septyma wielka	h	243/128
12	Oktawa czysta	c	2

Idea matematyczności świata pojawiła się po raz pierwszy (jak możemy mniemać z dostępnych nam przekazów) około 2600 lat temu, podczas popołudniowej przechadzki Pitagorasa. Szedł obok kuźni, skąd dobiegły go dźwięki młotów – różnej wysokości. Według legendy, fakt ten zastanowił go na tyle, że stworzył całą teorię muzyki, do dziś będącą w użyciu. Każdemu absolwentowi szkoły muzycznej znany jest *komat pitagorejski*, a *Das Wohltemperierte Klavier* Jana Sebastiana Bacha to udana próba porażenia sobie z dysonansem stworzonym przez ten komat¹⁾. Tak czy owak, Pitagoras mógł wyprzedzić Archimedesa i krzyknąć „Eureka” – odkrył bowiem, że istotą świata jest nic innego, jak właśnie liczba. Hipoteza sprawdziła się znakomicie, zarówno na wynalezionym przezeń monochordzie (instrumencie jednostrunowym), jak i w badaniach rzeźwistych ciała. Kalos – piękno staje się Harmonią, Eurytmia²⁾ i Symetrią.

Matematycy chętnie przyznają się do pewnego duchowego pokrewieństwa z muzyką i żałują, że muzy-

Wygodniej nam będzie prowadzić obliczenia nie na częściach struny, a na częstotliwościach. Pitagorejczycy pracowali z częściami struny, a te wielkości są odwrotnie proporcjonalne:

$$\text{długość drgającej struny} = \frac{1}{\text{częstość drgań}}$$

i trzeba tylko dobrać jednostki, tak aby współczynnik proporcjonalności był równy 1. Spójrzmy na klawiaturę fortepianu okiem matematyka. Skoro c¹ i c to te same dźwięki, tylko w innych oktawach, to – matematycznie – klawiatura jest jakby kolistą. Możemy teraz otrzymać doskonale znane muzykom zależności, rachując kąty. Kwinta to 7/12 kąta pełnego, kwarta to 5/12. Są to liczby względnie pierwsze z 12 i dopełniają się do 12. To dlatego... wszystko gra.

Tabelkę dla kwarty otrzymamy, czytając schemat dla kwinty od dołu.

Do tej pory wszystko jest w porządku. Kłopoty zaczynają się, gdy zaczynamy liczyć częstotliwości.

Planeta w swojej wędrówce po orbicie wydaje przyjemne dźwięki

Kwinta	210°	
Dwie kwinty	2 · 210° = 420° = 60°	Sekunda wielka
Trzy kwinty	3 · 210° = 630° = 270°	Seksta wielka
Cztery kwinty	4 · 210° = 840° = 120°	Tercja
Pięć kwint	5 · 210° = 1050° = 330°	Septyma wielka
Sześć kwint	6 · 210° = 1260° = 180°	Tryton
Siedem kwint	7 · 210° = 1470° = 30°	Sekunda mała
Ośmiem kwint	8 · 210° = 1680° = 240°	Seksta mała
Dziewięć kwint	9 · 210° = 1890° = 90°	Tercja mała
Dziesięć kwint	10 · 210° = 2100° = 300°	Septyma mała
Jedenaście kwint	11 · 210° = 2320° = 150°	Kwarta

Zacznijmy od sekundy małej – półtonu. Matematycznie jest ona równoważna siedmiu kwintom (albo minus pięciu kwintom!). Obliczamy:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{2187}{128} = \frac{2187}{2048}$$

– mnożymy siedem razy przez 3/2 i dzielimy przez taką potęgę dwójki, żeby ułamek był większy od 1, a mniejszy niż 2, otrzymując *cis*, dźwięk o pół tonu ponad *c*.

Ale siedem kwint daje ten sam dźwięk co cztery kwarty (czy jak kto woli, minus pięć kwint), tylko przesunięty o oktawę. Postępując podobnie, otrzymujemy zatem *des*, dźwięk o sekundę małą w dół od *d*. Ale

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{243} \quad \text{i podobnie} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243} \rightarrow \frac{256}{243}$$

(mnożyliśmy przez potęgę dwójki, żeby wylądować w tej samej oktawie). To jest trochę mniej niż

2187/2048. Ponadto – **zostawiamy to Czytelnikom do wyliczenia; wychodzą bardzo ładne ułamki!** – ani dwanaście półtonów, ani sześć całych tonów, ani cztery tercje nie dają dokładnie całej oktawy: zawsze trochę się od niej różnią i ta różnica (dokładniej: stosunek tych wielkości) to *komat*, w naszym przykładzie *komat* pitagorejski. *Komat* mierzy zawsze nieregularność skali muzycznej. Pitagorejskie *cis* jest zatem (matematycznie) większe, czyli muzycznie wyższe niż *des*, a wina leży wyłącznie po stronie arytmetyki i brzydkiego zachowania się ułamków 3/2 i 4/3.

Próbowano poprawić to już w starożytności.

W I wieku p.n.e. filozof grecki Didymos dopuścił jeszcze podział struny w 1/5 długości, skąd otrzymał jako tercję wielką stosunek 5/4, czyli 1,25, podczas gdy pitagorejską tercją była, jak widzieliśmy, 81/64 = 1,26. Odkrycie Didymosa zastosowano w XIV wieku, gdy rozwinęła się muzyka wielogłosowa i praktyka pokazała, że teoria Pitagorasa (iż najlepiej współbrzmia tę dźwięki, których interwały wyrażają się jak najprostszymi liczbami) – nie sprawdza się dokładnie. Ale rzecz charakterystyczna: samą zasadę utrzymano, starano się tylko zmienić skalę. I tak powstała tzw. skala naturalna:

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>c</i>
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Ćwiczenie (na ułamki). Wyliczyć wielkość *komatu* syntonicznego (didymejskiego), czyli różnicę między *cis* i *des* skali naturalnej. Okazuje się, że *cis* < *des*.

Podjęmowano i wciąż podejmuje się niezliczone próby poprawienia skali muzycznej.

Wszystkie matematyczne kłopoty ze skalą rozwiązuje skala temperowana, w której każdy półton jest zwiększeniem częstotliwości poprzedniego

$$\sqrt[12]{2} = 1,059463094359295264561825294946341700779204317494...$$

raza – oczywiście nie z tą absurdalną dokładnością, jaką tu podałem. Skala temperowana była zaproponowana przez J.G. Neidharta w 1706 roku i rozślawniona przez Jana Sebastiana Bacha (*Das Wohltemperierte Klavier*, 1772) – 24 preludia i fugi we wszystkich tonacjach durowych i molowych). Nie ma w tej skali *komatów*, i wszystko jest proste.

Matematyczna teoria muzyki jest fascynująca. Możemy wyliczyć... jakie dźwięki wydaje planeta w swoim ruchu dookoła Słońca

i w swoim ruchu obrotowym⁴⁾. Tak to prawdopodobnie pojmował Pitagoras. Pójdźmy za jego myślą i rozumiemy tak, jak by on to zrobił, gdyby żył dzisiaj. Jak wiesz, Czytelniku, cała przestrzeń za Księżycem wypełniona jest niewidzialną substancją, zwana Kwintesencją (no, tylko proszę nie brać tego na serio, jak i całego wyliczenia!!). To w tej substancji poruszają się planety (w XIX wieku stworzono całkiem poważnie traktowaną koncepcję eteru). Planety trącają cząsteczki Kwintesencji i rodzą się z tego przyjemne dźwięki. Jakie? Pitagoras w to wierzył, my możemy wyliczyć. Przypomnijmy sobie dziecięcą zabawkę: wirujący bąk na jednej nóżce. Gdy rozkręciliśmy go szybciej, wydawał wyższy dźwięk. Gdy zwalniał, buczał coraz niżej. Sygnał przybliżającej się do nas lokomotywy też zmienia ciągle swoją wysokość. Wysokość dźwięku zależy od szybkości. Jak wiemy, nazywamy to efektem Dopplera.

Możemy przyjąć zatem naturalne założenie, że dźwięk wydawany przez planety w ich ruchu obiegowym (dookoła Słońca) zależy od ich chwilowej prędkości kątowej, a dokładniej, jest do niej odwrotnie proporcjonalna. Ta prędkość jest zmienna, planety krążą bowiem po elipsach, a nie po idealnych okręgach. W dzisiejszych czasach znamy dokładnie wartości tej prędkości, możemy więc pokusić się o obliczenie wysokości „dźwięku planet”. Według legendy, Pitagoras słyszał całą tę orkiestrę. Tu legenda już przesadziła (planety „wydają” bowiem bardzo niskie dźwięki, kilkadziesiąt oktaw poniżej skali słyszalnej). Oczywiście z naszej teorii wynika, że im dalej znajduje się planeta od Słońca, tym wyżej śpiewa. Wenus jest monotonna, inne planety bardziej śpiewne, bo ich odległość od Słońca zmienia się bardziej. Rezultaty obliczeń są następujące (po przeskalowaniu o 35 oktaw).

Ale to jest dopiero wstęp do całej teorii. Wyliczyliśmy przecież to wszystko z punktu widzenia obserwatora znajdującego się na Słońcu. Gdy jesteśmy na Ziemi, należy uwzględnić efekt Dopplera... Po bardzo skomplikowanych obliczeniach powstanie fascynująca melodia. A możemy jeszcze uwzględnić dźwięk „wydawany” przez planety w wyniku ruchu obrotowego. Pitagoras wierzył, że jest to nadzwyczaj przyjemna melodia, a Kepler kazał się zachwycać nią z intelektualnego punktu widzenia. Nie wypada nam w to wątpić...

A tak na poważnie, czy należy uważać tę teorię za oszustwo i próbę naciągania? Nie całkiem. Należy ją potraktować z szacunkiem, jak każdą teorię, która okazała się nieprawdziwa, ale stanowiła dla nas oparcie we wspinalce do źródła prawdy.

W opowiadaniu Stanisława Lema *Młot*, zamknięty w międzygwiazdny statku kosmicznym astronauta

Przez setki lat marzeniem ludzkości było znalezienie kamienia filozoficznego (łac. *lapis philosophorum*). Miała to być substancja umożliwiająca przetwarzanie jednych pierwiastków chemicznych, jakbyśmy to dzisiaj określili, w inne. Poszukiwaniami zajmowali się alchemicy. Nasi poprzednicy byli przy tym dość konkretni: chcieli przemieniać żelazo czy ołów w złoto. Czy coś takiego w ogóle jest możliwe? Powszechnie uważa się, że była to ślepa uliczka badań. Okazuje się jednak, że takie przemiany, jednych pierwiastków w inne, są możliwe. Co więcej, zawdzięczamy im swoje istnienie. Możliwość taka realizowana jest zarówno w naturalny sposób w przyrodzie, jak i w sztuczny, wywołany przez człowieka. Istotę tego procesu wyjaśnia współczesna fizyka jądrowa.



Stanisław Bajtlik,

astrofizyk, pracuje w Centrum Astronomicznym im. Kopernika PAN, w Warszawie. Zajmuje się kosmologią. Jest autorem kilkudziesięciu prac naukowych i książki „Kosmiczny alfabet”. Pracował na uniwersytetach w Princeton, Kolorado i w Centrum Fizyki Teoretycznej w Triescie. Od lat zajmuje się popularyzacją nauki.

Kosmiczna alchemia

Stanisław Bajtlik

Wszystkie występujące w przyrodzie substancje można podzielić na proste i złożone. Te złożone to związki chemiczne i mieszaniny, proste zaś to pierwiastki chemiczne. Mieszaniny można rozdzielać, głównie metodami fizycznymi, np. za pomocą destylacji (tak np. rozdziela się składniki ropy naftowej, benzyny, oleje, parafiny, itd.), filtracji (tak oczyszcza się np. wodę do picia), odwirowania (tak np. rozdziela się izotopy uranu) itd. Związki chemiczne można rozdzielać zarówno metodami fizycznymi (np. przez podgrzewanie czy napromieniowanie), jak i chemicznymi (przez poddawanie reakcjom z innymi czynnikami). Pierwiastków chemicznych nie można już rozłożyć na prostsze substancje.

Pierwiastkami chemicznymi są na przykład tlen, żelazo, miedź, ołów, wodór. Do związków chemicznych zaliczamy na przykład wodę – związek tlenu i wodoru. Materia zbudowana jest z atomów. Atomy złożone są z jąder atomowych i z otaczających je elektronów. Jądra atomowe zawierają nukleony (czyli protony i neutrony). Atomy tego samego pierwiastka, a więc o takim samym ładunku jądra (czyli liczbie protonów w jądrze) i takiej samej liczbie elektronów na orbitach, ale różniące się od siebie liczbą neutronów w jądrze, nazywamy izotopami. Większość pierwiastków występuje w wielu postaciach izotopowych. Przykładowo najprostszy pier-

wiastek, wodór, występuje w trzech odmianach izotopowych. Dwie z nich, podstawowa (jądro złożone tylko z protonu) i deuter (jądro złożone z jednego protonu i jednego neutronu) są stabilne. Trzecia, tryt, rozpada się z okresem połowkowym (po którym rozpada się połowa jader) 12,3 lat.

Jądra atomowe można ze sobą łączyć. Łączenie jąder atomowych lekkich pierwiastków daje w efekcie pierwiastki cięższe i prowadzi do uwalniania dużych ilości energii. Właśnie taki proces zachodzi w trakcie wybuchu bomby wodorowej oraz we wnętrzach gwiazd. Jądra lekkiego pierwiastka, jakim jest wodór i jego izotopy, łączone ze sobą dają hel. Z kolei synteza jąder helu może prowadzić do powstawania cięższych pierwiastków, na przykład tlenu, krzemu i tak dalej. Jak ciężkie pierwiastki można w ten sposób wyprodukować? Otóż w ten sposób powstają wszystkie pierwiastki lżejsze od żelaza. Łączenie atomów pierwiastków lżejszych od żelaza prowadzi do wydzielania energii, gdybyśmy jednak próbowali wytworzyć pierwiastki cięższe niż żelazo, musielibyśmy energię dostarczać. Łączna liczba, naturalnych i wyprodukowanych sztucznie pierwiastków jest równa (zgodnie z danymi z 2006 roku) 118.

Gwiazdy są naturalnymi reaktorami, w których dochodzi do syntezy lekkich pierwiastków i ich przemiany w pierwiastki cięższe, aż do żelaza. Odbywa się to kosztem energii grawitacyjnej. Gwiazda kurczy się pod wpływem pola grawitacyjnego; owo kurczenie powoduje, że w środku gwiazdy powstają warunki sprzyjające zapoczątkowaniu reakcji termojądrowych – wysoka gęstość i wysoka temperatura. Podwyższanie temperatury ściskanego (w gwieździe – przez grawitację) gazu jest oczywiste. Podobny efekt obserwujemy, pompując koło rowerowe – czujemy, jak pod wpływem sprężania powietrze w pompce (a przez to i sama pompka) rozgrzewa się.

Kosmiczna alchemia, w której efekcie powstają wszystkie pierwiastki, które nas otaczają, polega właśnie na przemianach jednych pierwiastków w inne, przemianach, jakie zachodzą we wnętrzach gwiazd.

Gwiazdy są naturalnymi reaktorami, w których dochodzi do syntezy lekkich pierwiastków

My sami powstaliśmy w tych kosmicznych alchemicznych tyglach. Każdy atom naszego ciała, z wyjątkiem pierwotnego wodoru, powstał kiedyś we wnętrzu gwiazdy. Atomy wysmażone we wnętrzach gwiazd są rozpraszane w przestrzeni w trakcie wybuchów supernowych, a na mniejszą skalę przez wiatr gwiazdowy czy odrzucanie otoczki gwiazdy, w trakcie zjawiska zwanego mgławicą planetarną. Pierwiastki te służą następnie do tworzenia nowych gwiazd i układów planetarnych.

Skoro jednak gwiazdy produkują tylko te pierwiastki, które nie są cięższe od żelaza, to skąd biorą się pozostałe? Skąd bierze się na przykład złoto? Jak już powiedzieliśmy, po to, aby mogły powstać pierwiastki cięższe od żelaza, musimy dostarczyć energii. Takie pierwiastki potrafimy już wytwarzać sztucznie na Ziemi, w akceleratorach, bombardując atomy jednego pierwiastka protonami czy neutronami i wypychając na siłę do jąder jego atomów dodatkowe nukleony. W rezultacie uzyskujemy – z reguły niestabilne – jądra najcięższych pierwiastków. W ten sposób można też wyprodukować nawet takie pierwiastki, które nie występują naturalnie w przyrodzie.

W Kosmosie zachodzą podobne procesy. Na przykład w trakcie gwałtownych wybuchów gwiazd, tak zwanych gwiazd supernowych, kiedy materia wyrzucana jest z ogromną energią, uwalnia się duża ilość wysokoenergetycznych cząstek. Te właśnie cząstki mogą wbijać się w jądra lżejszych atomów i tworzyć jądra atomów cięższych. W ten sposób dochodzi do przelamywania naturalnych barier, które uniemożliwiają powstawanie ciężkich pierwiastków w gwiazdach.

Proces powstawania w Kosmosie ciężkich pierwiastków może mieć też charakter powolny. Niektóre takie pierwiastki powstają wskutek oddziaływania promieniowania kosmicznego z atomami znajdującymi się czy to w obłokach materii otaczających gwiazdy, czy to w obłokach w Galaktyce. W wyniku zderzeń cząstek promieniowania kosmicznego, z których część stano-



wią protony, i wbijania się tych promieni w jądra atomów mogą powstawać inne ciężkie jądra, z których część jest stabilna. Właśnie w ten sposób powstało złoto, z którego robione są naszyjniki, pierścienki, kolczyki i różne inne niepotrzebne rzeczy.

Alchemia była ślepą uliczką w badaniach przyrody. Większość jej celów nie została osiągnięta, np. nikt nie zamienia żelaza czy ołowiu w złoto. Niektóre cele, związane z mistyczną i spirytualistyczną jej częścią, zostały wręcz skompromitowane i odrzucone. Alchemicy, jak astrologi, koczają nam się dziś z magią, zambonem i szarlatanstwem. Paradoksalnie jednak, sama idea przemiany pierwiastków okazała się być realizowana w przyrodzie i (w ograniczonym zakresie) w laboratoriach fizyków. Tak, jak w logice, z fałszywego założenia może wynikać prawdziwy wniosek, tak wychodząca z fałszywych założeń alchemia, niechcący, przyczyniła się do rozwoju chemii, metalurgii, fizyki, astronomii i medycyny. Bez znajomości podstawowych praw przyrody, atomowej budowy materii, błędząc po omacku, metodą prób i błędów ludzie nauczyli się wytapiać rzadkie metale, wytwarzać stopy, leczyć niektóre choroby itp.

Największym jednak Metalurgiem, któremu zawdzięczamy swe istnienie, okazał się sam Kosmos. ●

matematyka

▶ dokończenie ze str. 51

	perihelium	aphelium
Merkury	a^5	a^4
Wenus	a^3	a^3
Ziemia	cis^3	c^3
Mars	f^2	h^1
Jowisz	Gis	F
Saturn	E_1	C_1
Uran	B_3	fis_3
Neptun	A_4	gis_4
Pluton	H_4	F_3

próbuję słuchać muzyki, wykonywanej w sposób perfekcyjny przez komputer. Nudzi się szybko, krzyczy „prześni!” i tęskni za muzyką w „ludzki, ułomny, a więc pięknym wykonaniu”.

Wszystko opiera się na matematyce, to jasne. Ale czy musimy zawsze trzymać się kurczowo tego oparcia? ●

¹⁾ Patrz np. Michał Szurek, *Matematyka dla humanistów*, RTW, Warszawa 2000.

²⁾ Eurytmia – harmonijny układ rytmu w poezji lub prozie, uzyskiwany przez powtórzenie wersów równozgłoskowych bądź zdań upodobnionych do siebie budową składniową.

³⁾ Jak wiadomo, Albert Einstein grał całkiem znośnie na skrzypcach. Po jednym z jego koncertów na cele dobroczynne pewien krytyk napisał: „Skrzypek grał całkiem dobrze, ale nie rozumiem, skąd się bierze ta jego światowa sława”.

⁴⁾ W tym wyliczeniu korzystam z niektórych pomysłów opisanych przez Pawła Wolffa *Muzyka Wszczęświata*, zamieszczonego w Biuletynie Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci, r. 2004. W chwili pisania artykułu autor był uczniem klasy pierwszej V Liceum Ogólnokształcącego w Zielonej Górze. Nie wiem, czy i na ile idea i wyliczenia Autora są jego własnym pomysłem.